Vous venez d'être accepté en prépa ENS CACHAN, félicitations !
Cela prouve votre sérieux et démontre vos capacités.

Durant ces deux années, nous allons travailler ensemble pour vous permettre de briller dans vos concours, et d'obtenir la réussite que vous méritez.
Si la finalité est reluisante, le chemin s'avèrera toutefois parsemé d'embuches qu'il nous faudra surmonter.
Là encore je serai présent à vos cotés.

Lors des deux ans à venir, l'enseignement des mathématiques représentera environ un tiers de votre formation. Plusieurs outils seront largement repris en économie, et il sera particulièrement important de bien les maitriser.
Le rythme sera soutenu, et pour vous en sortir au mieux, il est IMPERATIF de maitriser parfaitement les connaissances du lycée (cf fiche de révision).
Notez également que les calculatrices sont interdites aux concours, il faudra donc calculer par vous-même, et apprendre vos formules avec le plus grand soin.

Voici quelques conseils pour réussir votre rentrée :

- Arriver reposés à la rentrée (l'année va être longue et chargée)

- Vous remettre dans le bain au moins trois semaines avant la rentrée, en re-pratiquant les mathématiques : une fiche d'exercice à cet effet et jointe. (Rien n'est pire que deux mois et demi d'absence totale d'entrainement… quelque soit la discipline)

- Arriver en septembre avec une connaissance PRECISE et complète du programme de terminale. (Aucun doute ne doit être permis sur des formules usuelles de lycée)

En vous souhaitant de trouver le meilleur équilibre entre repos ; festivités ; et labeur.

Bonnes vacances à toutes et tous !

Luc MARTY (professeur de mathématiques)

" Les charmes enchanteurs de cette sublime science ne se décèlent dans toute leur beauté qu'à ceux qui ont le courage de l'approfondir"

Carl Friedrich GAUSS

Exercices de mathématiques pour la rentrée 2017.

Voici une fiche récapitulant quelques formules de lycée. Elles sont à connaitre parfaitement, et <u>avec la plus grande précision</u>.

I) Règles de calculs

i) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ ii) $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ iii) $a^n\times a^m=a^{n+m}$

iv) $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$ v) $(a^n)^m=a^{nm}$

vi) On inverse le sens d'une inégalité lorsqu'on la multiplie (ou divise) par un réel négatif.

vii) On inverse le sens d'une inégalité lorsqu'on la compose par une fonction décroissante.

viii) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$; $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

ix) Ne confondez pas addition et multiplication :
$a(b+c)=ab+ac$ et $a(b\times c)=abc$.

x) Les parenthèses sont nos amies… donc ne les oubliez pas !!!

II) Le second degré.

Une équation de degré 2, est de la forme $ax^2+bx+c=0$.
On note $\Delta=b^2-4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta<0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ ne possède aucune solution réelle, et pour tout réel x; ax^2+bx+c est du signe de a.
- Si $\Delta=0$, l'équation possède une solution réelle : $x_0=-\frac{b}{2a}$ et pour tout réel x ; ax^2+bx+c est du signe de a.
- si $\Delta>0$ l'équation possède deux solutions réelles : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

En outre ax^2+bx+c est du même signe que a si x n'est pas compris entre x_1 et x_2.
En revanche ax^2+bx+c est du signe contraire de a si x est compris entre x_1 et x_2.

III) Dérivées et primitives des fonctions usuelles, sur leurs intervalles de définition.

Primitive F	Fonction f	Dérivée f'
$kx+constante$	k (constante)	0
$\frac{1}{2}x^2+constante$	x	1
$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+constante$	x^n (avec $n\in\mathbb{N}$)	nx^{n-1}
$e^x+\ constante$	e^x	e^x
$x\ln(x)-x+constante$ Pas au programme	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+constante$ (à la limite du programme)	$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
$\ln(x)+constante$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

- Soit u ; v deux fonctions dérivables sur I et $k\in\mathbb{R}$

i) $(u+v)'=u'+v'$ ii) $(ku)'=k\,u'$

iii) $(uv)'=u'v+uv'$

iv) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ si v ne s'annule pas sur I.

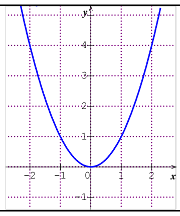
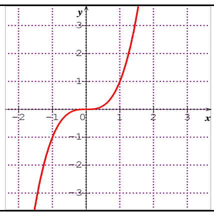
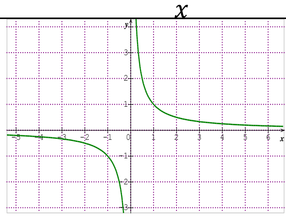
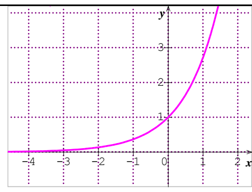
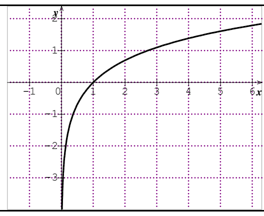
v) $(e^u)'=u'e^u$

vi) $(\ln(u))'=\frac{u'}{u}$ si $u>0$ sur I

vii) $(u^n)'=nu^{n-1}\times u'$

- Une fonction, dérivable sur I est croissante sur I, si et seulement si sa dérivée est positive sur I.
- Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$ alors $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$.

IV) Courbe représentatives des fonctions de référence

$x\rightarrow x^2$	$x\rightarrow x^3$	$x\rightarrow\frac{1}{x}$	$x\rightarrow e^x$	$x\rightarrow\ln(x)$
				

V) Suites

- Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1}=u_n+r$.

Dans ce cas, $u_n=u_0+nr=u_p+r(n-p)$ et
$u_0+u_1+\cdots+u_n=\frac{(u_0+u_n)(n+1)}{2}$

- Une suite (v_n) est géométrique de raison q si pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1}=q\times u_n$.

Dans ce cas $u_n=u_0\times q^n=u_p\times q^{n-p}$ et
$u_0+u_1+\cdots+u_n=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

VI) Relations fonctionnelles

i) Pour tous réels a et b, et tout entier n, on a :
$e^a\times e^b=e^{a+b}$; $\frac{e^a}{e^b}=e^{a-b}$; $(e^a)^n=e^{na}$

ii) Pour tous réels a et b strictement positifs et tout entier n, on :
$\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$; $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$; $\ln(a^n)=n\ln(a)$

iii) Pour tous réels a et b positifs, on a :
$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$; $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

iv) Pour tous réels a et b, et tout entier n, on a :
$(ab)^n=a^n\times b^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ (si $b\neq0$) ; $a^0=1$ (si $a\neq0$)

VII) Probabilité

- si $X\sim Bin(n;p)$ alors pour tout entier $k\in[0\,;n]$ on a : $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
- Si $X\sim U([a;b])$ alors pour tout réel $c<d$ de $[a;b]$ on a : $P(c\leq X\leq d)=\frac{d-c}{b-a}$

Exercices d'entrainement :

La calculatrice étant interdite lors des concours, il serait bon d'essayer de vous passer de cet outil dans la résolution des exercices, et le garder uniquement pour vérifier vos résultats.

I) Les calculs

1) Résoudre $2x - 120 \leq 146$
2) Factoriser $1 - 144a^2$
3) Développer $\left(2x - \sqrt{3}\right)(\sqrt{2}x + \sqrt{5})$
4) Résoudre $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 6x + y = -1 \end{cases}$
5) Résoudre $(3x - 2)(x + 7)(1 - 5x) = 0$
6) Simplifier $\frac{2x^4}{6} \times \frac{9}{x^7} \times \frac{x}{2}$
7) Factoriser $(1 + 3x)(x - 5) + 1 + 3x$
8) Simplifier $\frac{3x^3 - 2x^2 + x}{2x}$
9) Simplifier $\frac{(2n)^3 \times n^5}{(2n^3)^2}$
10) Résoudre $\frac{x^2 + x - 6}{2x - 3} \geq 0$
11) Simplifier $-\frac{x-1}{3} + \frac{-x-1}{2}$
12) Développer $(2 + 3x)^3$
13) Simplifier $\frac{(10^n)^2 \times 10^{-5}}{10^{1+n}}$
14) Résoudre $4x^2 + 25 > 20x$
15) Développer $x + 2\left(x + 2\left(x + 2(x + 2)\right)\right)$
16) Résoudre $\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) > 0$
17) Simplifier $5^3 \times 4^{-12} \times \frac{\left(2^3\right)^4}{5^2}$
18) Résoudre $\frac{2x+1}{4x-3} \leq 0$
19) Résoudre $2x - 1 + \frac{4}{7x-1} = 0$
20) Résoudre $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 4y = 5 \end{cases}$

II) Les études de fonctions.

Exercice 1 : Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition, sa dérivée, le signe de celle-ci, les variations de la fonction et d'éventuels extremums. On donnera ces informations sous forme d'un tableau.

i) $f(x) = 2x + e^{3x}$
ii) $g(x) = x - 5\ln(x) - \frac{4}{x}$
iii) $h(x) = xe^{-x}$
iv) $m(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$
v) $k(x) = xe^{-\frac{2}{x}}$

Exercice 2 : On pose $u(x) = 1 + x + e^{-x}$, et on travaillera dans tout l'exercice sur $[-10\,;10]$

i) Démontrer que $u(x) > 0$ pour tout réel $x \in [-10\,;10]$.
ii) En déduire les variations de f avec $f(x) = \ln(x + 1 + e^{-x})$
iii) Montrer que pour tout réel x ; $f(x) = -x + \ln(xe^x + e^x + 1)$
iv) On note $g(x) = xe^x + e^x + 1$. Etablir les variations de g.
v) Montrer que l'équation $g(x) = 1$ ne possède qu'une seule solution sur $[-10\,;10]$. Puis déterminer cette solution.
vii) En déduire le signe de $\ln(xe^x + e^x + 1)$ sur $[-10\,;10]$.
iv) On note C la courbe représentative de la fonction f et d la droite d'équation $y = -x$. Etudier la position de ces courbes, l'une par rapport à l'autre.

Exercice 3 : On pose pour $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f(x) = x^2 - (x + 1)\ln(x)$

i) Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$
ii) Déterminer le signe de $f''(x)$ et en déduire les variations de f'.
iii) Calculer $f'(1)$ et en déduire les variations de f

III) Les suites

Exercice 1 : Dans chacun des cas suivants la suite (u_n) est arithmétique. Déterminer u_0, u_{20} et sa raison r.

i) pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} = u_n + 3$ avec de plus $u_2 = 12$.
ii) $u_5 = 10$ et $u_{11} = 19$
iii) $u_n = (n + 1)^2 - n^2$

Exercice 2 : On considère la suite (u_n) donnée par $u_0 = 161$ et pour tout entier naturel n ; $u_{n+1} = 0.6\,u_n + 8$. On pose également $v_n = u_n - 20$.

i) Montrer que (v_n) est géométrique, et en préciser la raison.
ii) En déduire l'expression de v_n en fonction de n, ainsi que la limite de la suite (v_n).
iii) En déduire l'expression de u_n en fonction de n, ainsi que la limite de (u_n).

Exercice 3 : Au 1er janvier 2017, une association compte 280 adhérents. Chaque année, 30% des adhérents ne renouvellent pas leur adhésion et 30 nouveaux adhérents arrivent.
i) Modéliser cette situation à l'aide d'une suite (u_n) que vous définirez.
ii) Conjecturer la limite l de cette suite (on pourra par exemple utiliser la calculatrice ici).
iii) On pose $v_n = u_n - l$. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. En préciser la raison.
iv) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
v) Qu'est ce que cela signifie à long terme, dans notre situation ?

IV) Les intégrales

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_1^3 (x^3 + 2x^2 - 3x + 1)dx$ 2) $\int_1^3 e^{4x+1}dx$ 3) $\int_2^5 \frac{4x+2}{x^2+x+3}dx$ 4) $\int_1^4 \left(\frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{3}x^2\right) dx$

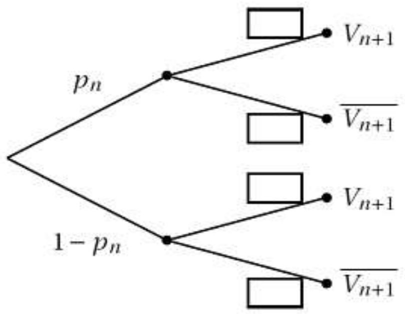
V) Probabilité

Exercice 1 : Notre Tony Parker national réalise un entrainement de lancers francs.
L'événement « le n-ième lancer est réussi » est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'événement V_n.
L'observation de la carrière de Tony Parker montre que :
- Si un lancer est réussi, le suivant a une probabilité égale à 0,9 d'être aussi réussi.
- Si un lancer est raté, le suivant a une probabilité égale à 0,3 d'être aussi raté.
On suppose que le premier lancer est réussi, c'est-à-dire $p_1 = 1$
i) Construire un arbre pondéré représentant les résultats de 3 lancers successifs, le premier étant réussi. En déduire les probabilité des événements : A : « les 2ème et 3ème lancers sont réussis » et B : « les 2ème et 3ème lancers sont ratés »
ii) Calculer la probabilité p_3 .
iii) Calculer les probabilités suivantes après avoir indiqué par une phrase à quels évènements elles correspondent.
a) $P(V_2 \cap V_3)$ b) $P_{V_2}(V_3)$ c) $P_{V_3}(V_2)$

iv) n désigne un entier supérieur ou égal à 2. Recopier et compléter l'arbre ci-contre en fonction des données de l'énoncé :

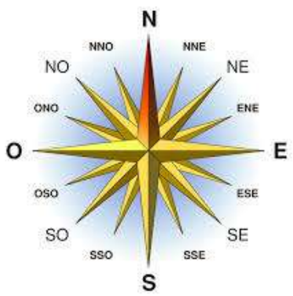
v) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir que $p_{n+1} = 0.2\, p_n + 0.7$

vi) On note (u_n) la suite définie par $u_n = p_n - \frac{7}{8}$
i) Démonter que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison
ii) Exprimer p_n en fonction de n



Exercice 2 : Lors d'une étude sur le comportement animal, on relâche des oiseaux, qui déboussolés, prennent des directions au hasard. On modélise la direction prise par un oiseau par la VA, notée X correspondant à l'angle (en degrés) entre le nord et la direction prise (selon le sens des aiguilles d'une montre). X suit alors une loi uniforme sur $[0 ; 360]$

Traduire avec X les évènements suivants et calculer leur probabilité.
i) L'oiseau part « plein sud »
ii) L'oiseau prend une direction entre SE et SSO.
iii) L'oiseau prend une direction entre NO et ENE



Exercice 3 : Dans un paquet de bonbons, il y a des bonbons rouges et des bonbons bleus. On choisit au hasard 20 bonbons dans ce paquet. On admet que le nombre de bonbons du paquet est suffisamment grand pour considérer ces tirages comme indépendants. Il y a un quart de bonbons bleus dans le paquet. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de bonbons bleus tirés.
i) Quelles sont les valeurs que peut prendre X ? ii) Quelle est la loi suivie par X ? En préciser les paramètres.
iii) Quelle est la probabilité de tirer 7 bonbons bleus ?
iv) Quelle est la probabilité de tirer au plus 11 bonbons rouges ? v) Donner l'espérance de X.